المملكة المغربية
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵉⵏⵏⴰⵢⵉⵏ
المركز الوطني للامتحانات المدرسية وتقييم التعلمات

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

- الدورة الاستدراكية 2026 -



| | | | |
|---|---|---|---|
| الموضوع | | | RS 22F |
| المادة | الرياضيات | مدة الإنجاز | 3س |
| الشعبة والمسلك | مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية) | المعامل | 7 |

## Instructions générales

- L'utilisation d'une calculatrice non programmable est autorisée.
- Le candidat peut traiter les exercices et le problème suivant l'ordre qui lui convient ;
- Il est recommandé d'éviter l'usage de la couleur rouge dans la rédaction des solutions.

## Composantes du sujet

- L'épreuve est composée de trois exercices et d'un problème, indépendants entre eux, et répartis selon les domaines comme suit :

| | | |
|---|---|---|
| **Exercice 1** | Géométrie dans l'espace | 3 points |
| **Exercice 2** | Nombres complexes | 3.5 points |
| **Exercice 3** | Calcul des probabilités | 2.5 points |
| **Problème** | Etude de fonctions numériques, suites numériques et calcul intégral | 11 points |

## Notations

- On note $\overline{z}$ le conjugué d'un nombre complexe $z$, et $|z|$ son module.
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.
- $e$ est le nombre réel tel que $\ln(e) = 1$.

## Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A\,(1,1,1)$ , $B\,(2,0,1)$ et $C(-2,-2,4)$ . Soit $(P)$ le plan d'équation $x+y-2z+12=0$

| | |
|---|---|
| 0.25 pt | **1.a.** Montrer que $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ |
| 0.25 pt | **1.b.** Déduire que les plans $(P)$ et $(OAB)$ sont parallèles. |
| 0.25 pt | **1.c.** Vérifier que : $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite $(OC)$ |
| 0.5 pt | **1.d.** Vérifier que $C\in(P)$ et montrer que la droite $(OC)$ est orthogonale au plan $(P)$ |

**2.** Soit $(S)$ la sphère de centre $\Omega(a,b,c)$, tangente au plan $(P)$ au point $C$ et coupée par le plan $(OAB)$ suivant un cercle $(\Gamma)$ de centre $O$ et de rayon $r=4\sqrt{3}$.

| | |
|---|---|
| 0.5 pt | **2.a.** Vérifier que $\Omega\in(OC)$ et déduire que $a=b$ et $c=-2a$ |
| 0.25 pt | **2.b.** Montrer que $O\Omega=\lvert a\rvert\sqrt{6}$ |

| | |
| --- | --- |
| 0.25 pt | **2.c.** Vérifier que $d(\Omega,(P)) = \lvert a+2\rvert\sqrt{6}$ |

| | |
| --- | --- |
| 0.75 pt | **2.d.** Montrer que $a=1$ (Remarquer que $\Omega C^2 - \Omega O^2 = 48$) puis déduire les coordonnées de $\Omega$ et le rayon $R$ de la sphère $(S)$ |

## Exercice 2 (3.5 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A$ , $B$ et $C$ d'affixes respectives : $a=\sqrt{3}+i$ , $b=\overline{a}$ et
$c=2\sqrt{3}$

| | |
| --- | --- |
| 0.5 pt | **1.a.** Montrer que $\dfrac{a-c}{a} = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ |

| | |
| --- | --- |
| 0.25 pt | **1.b.** Écrire le nombre complexe $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sous forme trigonométrique |

**2.** Soit $R$ la transformation du plan qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-a)+a$ .

| | |
| --- | --- |
| 0.5 pt | **2.a.** Vérifier que $R$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle. |

| | |
| --- | --- |
| 0.5 pt | **2.b.** Montrer que $R(O)=C$ |

**3.** Soit $D$ le point d'affixe $d$ tel que $R(B) = D$

| | |
|---|---|
| 0.5 pt | **3.a.** Montrer que $d = 2\sqrt{3} + 2i$ et déduire que les points $A$ ,$D$ et $O$ sont alignés. |
| 0.5 pt | **3.b.** Montrer que $\dfrac{c-b}{d} = \dfrac{1}{2}$ |
| 0.25 pt | **3.c.** Montrer que $OB = DC$ |
| 0.5 pt | **3.d.** Déduire que le quadrilatère $OBCD$ est un trapèze isocèle. |

## Exercice 3 (2.5 points):

Une urne contient quatre boules blanches numérotées : $0; 0; 1; 1$ et deux boules noires numérotées : $0; 1$

Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne. On considère les évènements suivants :

$A$ : « Les deux boules tirées sont de même couleur. »

$B$ : « La somme des nombres portés par les deux boules tirées est égale à $2$. »

| | |
|---|---|
| 0.5 pt | **1.a.** Montrer que $p(A) = \dfrac{7}{15}$ |
| 0.5 pt | **1.b.** Montrer que $p(B) = \dfrac{1}{5}$ |

| | | |
| --- | --- | --- |
| 0.5 pt | **2.** Montrer que la probabilité de $B$ sachant que $A$ est réalisé est $p(B/A)=\frac{1}{7}$ | |

**3.** On considère la variable aléatoire $X$ qui, à chaque tirage, associe la somme des nombres portés par les deux boules tirées.

| | | |
| --- | --- | --- |
| 0.75 pt | **3.a.** Copier et compléter le tableau ci-dessous, qui représente la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ | |

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
| --- | --- | --- | --- |
| $p(X=x_i)$ | | | |

| | | |
| --- | --- | --- |
| 0.25 pt | **3.b.** Montrer que l'espérance de la variable aléatoire $X$ est $E\left(X\right)=1$ | |

## Problème (11 points):

**Partie I :**

On considère la fonction numérique $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{2x}-1$

| | | |
| --- | --- | --- |
| 0.25 pt | **1.a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ , l'équation $g(x)=0$ | |

| | | |
| --- | --- | --- |
| 0.5 pt | **1.b.** Vérifier que $g(x)<0$ sur $]-\infty,0[$ et que $g(x)>0$ sur $]0,+\infty[$. | |

| | | |
| --- | --- | --- |
| 0.75 pt | **2.** Montrer que $\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\lvert g(x)\rvert\,\mathrm{d}x=\frac{9}{8}$ | |

**Partie II:**

On considère la fonction numérique définie par $f(x) = x - \ln 2 + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

| | |
| --- | --- |
| 0.25 pt | **1.** Vérifier que la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ |
| 0.5 pt | **2.a**. Montrer que $f$ est une fonction paire. |
| 0.5 pt | **2.b.** Vérifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ |
| 0.5 pt | **3.a.** Montrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x - \ln 2$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ |
| 0.5 pt | **3.b.** Déduire que la droite $(\Delta')$ d'équation $y = -x - \ln 2$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ |
| 0.75 pt | **4.a.** Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{1 + e^{2x}}$ |
| 0.5 pt | **4.b.** Déduire que $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ (On peut utiliser la question 1 de la Partie I.) |

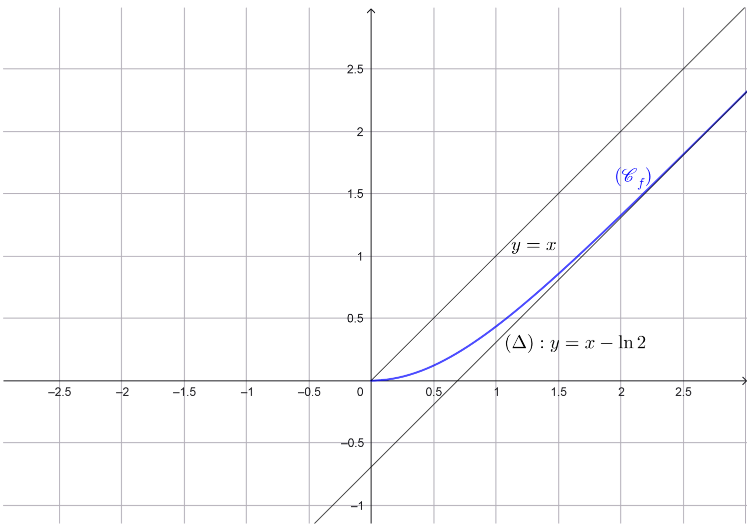
| | |
|---|---|
| 0.5 pt | **5.a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$ |

| | |
|---|---|
| 0.5 pt | **5.b.** Montrer pour tout $x$ de $[0, +\infty[$ : $f(x) \leq x$ |

| | |
|---|---|
| 0.5 pt | **5.c.** Etudier la position de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite $(\Delta)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ |

| | |
|---|---|
| 0.5 pt | **5.d.** Déduire que pour tout $x$ de $[0, +\infty[$ : $0 \leq f(x) - (x - \ln 2) \leq \ln 2$ |

**6.** Le graphique ci-dessous représente la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f$ sur $[0, +\infty[$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.




| | |
|---|---|
| 0.5 pt | **6.a.** Reproduire le graphique ci-dessus puis tracer dans le même repère, la droite $(\Delta')$ et compléter la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ |

| | | |
| --- | --- | --- |
| 0.5 pt | **6.b.** Soit $\mathscr{A}$ , en unité d'aire , l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathscr{C}_f)$ , la droite $(\Delta)$, et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ <br> Montrer que $0 \leq \mathscr{A} \leq \ln 2$ | |

**7.** Soit $\varphi$ la restriction de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$

| | | |
| --- | --- | --- |
| 0.5 pt | **7.a.** Montrer que $\varphi$ admet une fonction réciproque $\varphi^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera. <br> (L'expression de $\varphi^{-1}(x)$ n'est pas demandée.) | |

| | | |
| --- | --- | --- |
| 0.25 pt | **7.b.** Vérifier que $\varphi^{-1}\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right)\right)=\ln 2$ | |

| | | |
| --- | --- | --- |
| 0.5 pt | **7.c.** Montrer que $\varphi^{-1}$ est dérivable en $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ <br> et que $\left(\varphi^{-1}\right)'\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right)\right)=\frac{5}{3}$ | |

**Partie III**

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par $u_0=\ln 2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, pour tout entier naturel $n$

| | | |
| --- | --- | --- |
| 0.5 pt | **1.** Montrer par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant \ln 2$ , pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ | |

| | | |
| --- | --- | --- |
| 0.5 pt | **2.** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante. <br> (On peut utiliser la question 5.b de la Partie II.) | |

| | | |
| --- | --- | --- |
| 0.75 pt | **3.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite. | |